La Radio sin cálculos [1]

por

GRAFOS

ELEMENTOS DE UN CIRCUITO OSCILANTE: RESISTENCIAS Y CONDENSADORES.—Los elementos de un circuíto oscilante son: resistencia, capacidad y autoinducción, pudiendo figurar todos o faltar alguno de ellos.

La manera de agrupar estos elementos se expresa matemáticamente por fórmulas sencillas que nosotros vamos a transformar en gráficos para que nuestros lectores puedan resolver todos los problemas por medio de éstos sin recurrir a las primeras.

Estudiaremos primero las resistencias y examinaremos a continuación los condensadores, y verá el lector cómo unas mismas gráficas sirven para ambos casos.

La resistencia puede asociarse en *serie* o en derivación.

Una agrupación en serie de elementos consiste en unir el extremo de una con el comienzo del otro. (Véase pág. 14, RADIOELECTRICIDAD núm. 1).

Así pues, si tenemos cuatro resistencias R1 - R2 - R3 y R4, y las queremos conectar en serie, uniremos el extremo de la R1 con el origen de la R2, el extremo de ésta con el origen de la R3 y el extremo de ésta con el origen de la R4; quedando libres, formando los terminales de la agrupación el origen de la R1 y el extremo de la R4. En esta agrupación, las resistencias se suman, es decir la resistencia equivalente es igual a la suma de las resistencias. Se comprenderá con facilidad este fenómeno si acudimos a la socorrida comparación hidráulica, pues si enchufamos varias cañerías por las que va a circular el agua, la dificultad para atravesarlas todas será igual a la suma de las que le ofrezca cada tubo, es decir, la resistencia equivalente es igual a la suma de las resistencias de cada una.

Se ve, pues, que cuando se introducen varias resistencias en *serie* en un circuito, se ***aumenta*** la ***resistencia*** del mismo, y en consonancia se reduce la intensidad si el potencial permanece el mismo.

Se agrupan en derivación varias resistencias cuando se unen entre sí de un lado todos los orígenes de las resistencias, y de otro todos los extremos.

En este caso la resistencia total es ***menor*** que la de una cualquiera de las componentes, y la *corriente aumenta* porque se suman las conductancias (conductancia es la inversa de la resistencia) o sea la facilidad de dejar pasar la corriente de un punto a otro, entre los cuales conectamos las resistencias.

---

(1) Ver número 3 de RADIOELECTRICIDAD.

Se comprende fácilmente este fenómeno si, refiriéndonos de nuevo a la comparación hidráulica, consideramos dos depósitos A y B (fig. 7) unidos por tres tubos iguales, provistos de llave cada uno. Si abrimos la llave 1 el agua del depósito A pasará al B en un tiempo determinado; por ejemplo, en 12 minutos. Si en lugar de haber abierto solamente la llave 1, hubiéramos abierto las llaves 1 y 2, la cantidad de agua que pasaría en cada instante sería doble de la que pasaba antes, y en consecuencia, el tiempo que tardaría en pasar del depósito A al depósito B sería la mitad, o sea 6 minutos. Y si hubiéramos abierto de una vez las tres llaves 1, 2 y 3, el agua que pasaría en cada momento del depósito A al B sería tres veces mayor que en el primer caso, y en consecuencia el tiempo que tardaría en vaciarse el depósito A sería la tercera parte, o sea 4 minutos.

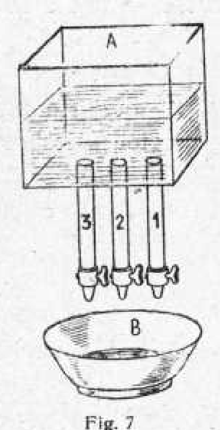


Fig. 7
Comparación hidráulica del caso de varios conductores en paralelo

En el caso de tres resistencias en derivación, si las tres fueras iguales a 24 ohmios, la resistencia equivalente sería igual a 24 : 3 = 8 ohmios.

Cuando las resistencias no son iguales, la cuestión se complica ligeramente, y para resolverla conviene combinar solamente dos de ellas, la resultante combinarla con otra y así sucesivamente.

La resistencia equivalente a dos resistencias en derivación o paralelo viene dada por la expresión:

Resistencia equivalente = producto de las resistencias / suma de las resistencias.

Es decir, que si tenemos dos resistencias de 25 y 45 ohmios y las agrupamos en paralelo, la resistencia equivalente será de 16 ohmios, o sea el cociente de dividir 1.125 (producto de 45 × 25) por 70 (suma de 45 y 25).

Pueden evitarse estos sencillísimos cálculos con el ábaco de la figura 8, que consta, en realidad, de dos ábacos diferentes.

El primero comprende las dos oblicuas y el eje central y permite evaluar la resistencia equivalente a dos resistencias en paralelo.

Su empleo no ofrece ninguna dificultad, pues si queremos hallar la resistencia equivalente a R_1 y R_2, se busca el valor de R_1 en la oblicua de la izquierda, y el de R_2 en la de la derecha y uniendo los dos valores con la regla, el punto donde corte al eje central da el valor R de la resistencia equivalente.

Si deseamos hallar la resistencia equivalente a 12 y 8 ohmios en paralelo, buscaremos 12 en la oblicua de la izquierda, y 8 en la de la derecha: los uniremos con la regla y el punto donde ésta encuentra al eje es el valor de la resistencia equivalente: 4,8 ohmios.

Obsérvese que las oblicuas sólo van graduadas de 0 a 20, pero pueden

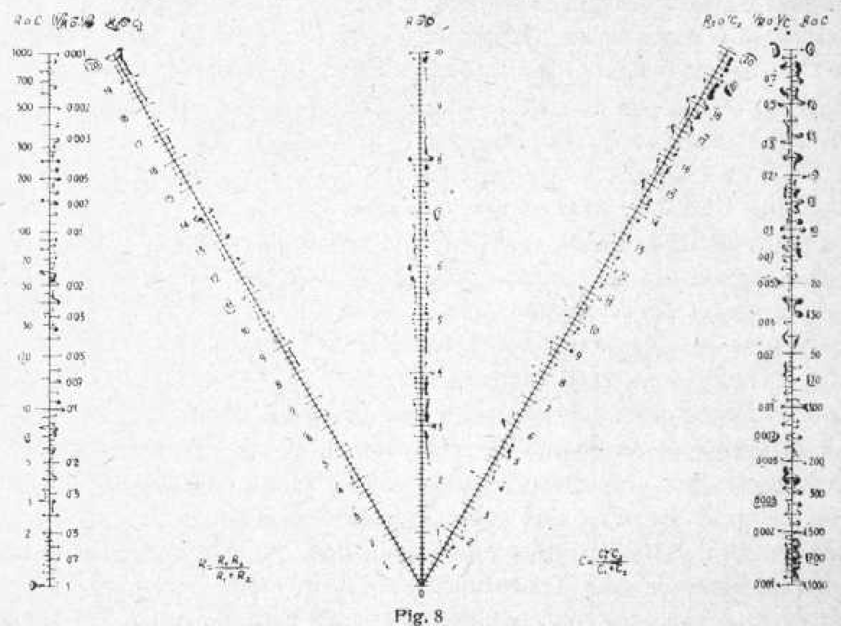


Fig. 8

Abaco para el cálculo de resistencias en derivación y para el de capacidades en serie

multiplicarse los valores de R_1, R_2 y R por un *mismo* número para encontrar el que corresponda a dichos valores. Si hubiéramos querido buscar la resistencia equivalente a 12.000 y 8.000 ohmios en paralelo, habríamos hallado como antes la de 12 y 8, que están en el ábaco, y el resultado 4,8 ohmios lo multiplicaríamos por 1.000 que es el factor por que hemos multiplicado los componentes. La resultante será 4.800 ohmios.

Si en lugar de dos, tuviéramos tres resistencias en paralelo de 12, 8 y 6 ohmios respectivamente, hallaríamos primero la equivalente de 12 y 8, y el resultado 4,8 lo combinaríamos con 6 y obtendríamos 2,65 ohmios como valor de la resistencia equivalente de las de 12, 8 y 6 ohmios en paralelo.

Seguiríamos combinando la equivalente de las tres resistencias con la cuarta si la hubiere, y así sucesivamente.

Las dos escalas extremas a derecha e izquierda son escalas de inversas que permiten resolver fácilmente los problemas de este género. Así, para determinar la resistencia equivalente a 1.000, 500 y 200 ohmios en paralelo, hallaríamos sus inversas 0,001, 0,002 y 0,005, que se encuentran a la derecha de 1.000, 400 y 200 en la escala de la izquierda.

Sumaríamos dichas inversas 0,001 + 0,002 + 0,005 = 0,008; buscaríamos la suma de esta escala y a su lado encontraríamos, a su izquierda, su directo 224, que representa el número de ohmios de la resistencia equivalente.

Obsérvese que si el número no está en la escala, basta dividirle por una potencia de 10 y multiplicar su inversa por la misma potencia.

Cuanto hemos dicho sobre las resistencias es aplicable a los condensadores, con la diferencia de que se comportan los condensadores en paralelo como las resistencias en serie, y los condensadores en serie como las resistencias en paralelo.

En efecto, cuando se conectan en paralelo varios condensadores (véase RADIOELECTRICIDAD, núm. 5), uniendo de un lado las armaduras A. y de otro las B, se obtiene, en definitiva, un condensador equivalente cuyas armaduras son la suma de las armaduras de cada uno de los condensadores componentes (caso parecido al de las resistencias en serie, cuya resistencia equivalentes es igual a la suma de las resistencias componentes).

Y cuando se conectan varios condensadores en serie la capacidad resultante es menor que la de cada condensador componente; en el caso de ser dos solamente, se obtiene dicha capacidad dividiendo el producto de los componentes por su suma (caso idéntico al de las resistencias en derivación. Si, pues, tenemos dos condensadores de 2 y 4 microfaradios y los asociamos en paralelo, la capacidad resultante será de 6 microfaradios, y si los asociamos en serie será solamente 1,3 microfaradios (2 × 4 : 6). Si en vez de 2 fueran 3 los condensadores a asociar, se combinarían los dos primeros, y el resultado se combinaría con el tercero, y así sucesivamente se operaría si hubiera más.

La misma gráfica de la figura 8, que, como hemos visto, resuelve los problemas de la asociación de las resistencias en derivación, sirve para resolver los problemas de la asociación de los condensadores en serie, y por esto cada línea va encabezada con los símbolos R de la resistencia y C de la capacidad.

El lector podrá plantearse y resolver problemas de asociación de condensadores en serie siguiendo el proceso anteriormente descrito para las resistencias en derivación.

Se verifica:

$$(a + j\,b) \pm (\alpha + j\,\beta) = (a + \alpha) \pm j\,(b + \beta) \qquad (1)$$

$$(a + j\,b)\,(\alpha + j\,\beta) = (a\,\alpha - b\,\beta) + j\,(a\,\beta + \alpha\,b) \qquad (2)$$

$$\frac{a + j\,b}{\alpha + j\,\beta} = \frac{a\,\alpha + b\,\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + j\,\frac{b\,\alpha - a\,\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad (3)$$

$$(a \pm j\,b)^2 = (a^2 - b^2) \pm j\,2\,a\,b \qquad (4)$$

$$\sqrt{a \pm j\,b} \; \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm j\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \qquad (5)$$

Se llama *afijo* de la expresión imaginaria $a + j\,b$ al punto que tiene por abcisa a y por ordenada b.

Si el punto es P (fig. 2), determina la dirección y magnitud de la recta o P; a la longitud ρ de esta recta se le llama *módulo* de la expresión imaginaria y al ángulo φ que forma con el eje $o\,x$ se le llama *argumento* de la misma.

Se tiene, pues:

$$a = \rho \cos \varphi$$

$$b = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

$$+\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$$

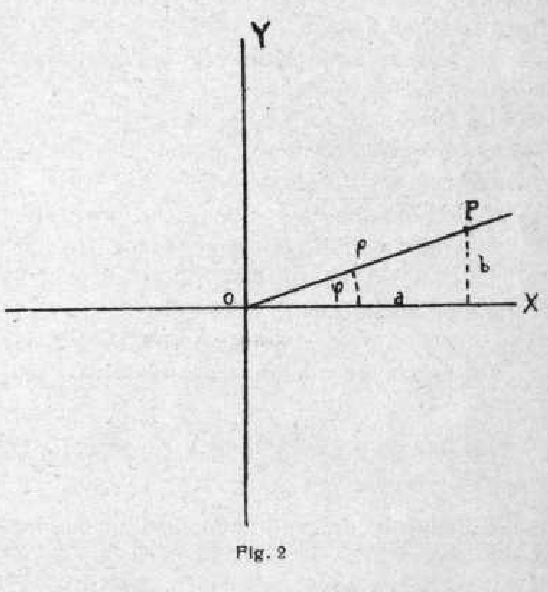


Fig. 2

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

luego

$$a \pm j\,b = \rho\,(\cos \varphi \pm j \operatorname{sen} \varphi)$$

Se tiene:

$$\cos \varphi \pm j \operatorname{sen} \varphi = e^{\pm j\,\varphi}$$

siendo e la base de los logaritmos neperianos, y el ángulo φ medido en radianes; de donde se deduce

$$(\cos n\,\varphi \pm j \operatorname{sen} n\,\varphi) = e^{\pm j n \varphi} = \left(e^{\pm j \varphi}\right)^n = (\cos \varphi \pm j \operatorname{sen} \varphi)^n$$

y, por tanto, la fórmula de Moivre:

$$[\rho (\cos \varphi \pm j \operatorname{sen} \varphi)]^n = \rho^n (\cos n \varphi \pm j \operatorname{sen} n \varphi)$$

cualquiera que sea el valor de n.

Una expresión imaginaria de módulo ρ y argumento φ se representa por (ρ, φ).

Así, se tendrá:

$$j = (1{,}90^\circ) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right); \quad -1 = (1{,}180^\circ) = (1, \pi)$$

$$-j = (1{,}270^\circ) = (1, -90^\circ) = \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

según que el argumento se mida en grados o en radianes.

La expresión gráfica de la suma o resta—fórmula (1)—es una recta que une el origen 0 con el extremo del segundo vector tomado a continuación del primero en su dirección propia y en su propio sentido o en el opuesto según se trate de suma o resta.

El módulo de la suma está comprendido entre la suma y la diferencia de los módulos de los sumandos.

La expresión gráfica del producto—fórmula (2)—es un vector que tiene por módulo el producto de los módulos de los factores y por argumento la suma de los argumentos de aquellos.

Si las expresiones son (ρ, φ) y (ρ', φ') el producto será: $[(\rho \times \rho'), (\varphi + \varphi')]$.

Del mismo modo el cociente será: $[(\rho : \rho'), (\varphi - \varphi')]$.

El cuadrado de (ρ, φ) será: $(\rho^2, 2\varphi)$.

La potencia n de (ρ, φ) será: $(\rho^n, n\varphi)$.

La raíz cuadrada de (ρ, φ) será: $\left(\sqrt{\rho}, \frac{\varphi}{2}\right)$.

La raíz de grado n de la expresión (ρ, φ) será: $\left(\sqrt[n]{\rho}, \frac{\varphi}{n}\right)$ y tendrá n valores distintos correspondientes a un mismo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y a los n argumentos

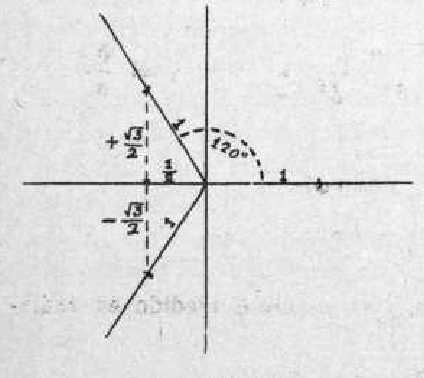


Fig. 5

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{2\pi + \varphi}{n},$$

$$\frac{4\pi + \varphi}{n}, \quad \frac{6\pi + \varphi}{n}, \ldots$$

$$\frac{2(n-1)\pi + \varphi}{n}$$

pues todos estos valores al elevarse a la potencia n reproducirán la expresión (ρ, φ).

Aplicando esta deducción a la unidad

positiva (1,0) se hallarán, por ejemplo, los tres valores de su raíz cúbica: (fig 3)

$$OA = (1{,}0^\circ) = 1 + j\,0.$$

$$OB = (1{,}120^\circ) = \frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = (1{,}240^\circ) = \frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5.—Funciones circulares

RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE LAS FUNCIONES CIRCULARES DE UN ÁNGULO.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

de las que se deducen

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES DE ALGUNOS ÁNGULOS:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno =	+1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	+1
Tangente =	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
Cotangente =	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

FUNCIONES CIRCULARES DE ALGUNOS ÁNGULOS RELACIONADOS CON α EN FUNCIÓN DE LOS DE α.

	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$	$360 \pm \alpha$	$-\alpha$
Seno =	$+\cos\alpha$	$\mp \operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$
Coseno =	$\mp \operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos$
Tangente =	$\mp \operatorname{cotg}\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$\mp \operatorname{cotg}\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
Cotangente =	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{cotg}\alpha$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES DE DOS ÁNGULOS.

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \mp 1}{\operatorname{cotg} b \pm \operatorname{cotg} a}$$

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\operatorname{sen}(b \pm a)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

FUNCIONES DE LOS MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DE UN ÁNGULO.

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \qquad \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} a}}{2} - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen} a}}{2}$$

Tablas trigonométricas naturales

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 n$$

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} a}}{2} + \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen} a}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

$$\operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}$$

VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

$$\operatorname{sen} a = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2} = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \dots$$

° '	sen	tan	cot	cos		° '	sen	tan	cot	cos	
0 0	0.0000	0.0000	infinit.	1.0000	0 90	8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 82
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50	10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40	20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30	30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20	40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20
50	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10	50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89	9 0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0 81
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50	10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40	20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30	30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20	40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20
50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10	50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10
2 0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0 88	10 0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0 80
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50	10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40	20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30	30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20	40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10	50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10
3 0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0 87	11 0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0 79
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50	10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40	20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30	30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20	40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10	50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10
4 0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0 86	12 0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0 78
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50	10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40	20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30	30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20	40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10	50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10
5 0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0 85	13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50	10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50
20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40	20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30	30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20	40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10	50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10
6 0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0 84	14 0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0 76
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9042	50	10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40	20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30	30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30
40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20	40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10	50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83	15 0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0 75
10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50	10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50
20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40	20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40
30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30	30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30
40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20	40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20
50	0.1383	0.1376	7.2687	0.9907	10	50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10
8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 82	16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0 74
	cos	cot	tan	sen	' °		cos	cot	tan	sen	' °

$$\cos a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} = a - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{tg} a = a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{15} + \frac{17a^7}{315} + \frac{62a^9}{2835} + \dots \text{ siendo } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

Tablas trigonomé

° '	sen	tan	cot	cos		° '	sen	tan	cot	cos	
16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0 74	24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0 66
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50	10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40	20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30	30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20	40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10	50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
17 0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0 73	25 0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0 65
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50	10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40	20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30	30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20	40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10	50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
18 0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0 72	26 0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0 64
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9602	50	10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40	20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30	30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20	40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10	50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
19 0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0 71	27 0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0 63
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50	10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40	20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30	30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20	40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10	50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
20 0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0 70	28 0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0 62
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50	10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40	20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30	30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30
40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20	40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20
50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10	50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69	29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61
10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50	10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50
20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40	20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40
30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30	30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30
40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20	40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20
50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10	50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10
22 0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0 68	30 0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0 60
10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50	10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50
20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40	20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40
30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30	30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30
40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20	40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20
50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10	50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10
23 0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0 67	31 0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0 59
10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50	10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50
20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40	20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40
30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30	30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30
40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20	40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20
50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10	50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10
24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0 66	32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0 58
	cos	cot	tan	sen	' °		cos	cot	tan	sen	' °

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas resultantes de las series anteriores se dan con 4 cifras decimales en las tablas adjuntas, en las que varían los ángulos de 10 en 10 minutos sexagesimales.

A la columna de ángulos de la izquierda corresponden las funciones que encabezan las demás columnas y a la de ángulos de la derecha corresponden las funciones indicadas al pie de las mismas columnas.

Para calcular las funciones de un ángulo no contenido en las tablas por estar comprendido entre dos de aquellos se interpola entre los dos que lo comprenden, multiplicando el exceso del ángulo dado sobre el menor de los contenidos en las tablas por la décima parte de la diferencia tabular (diferencia entre dos funciones consecutivas de las que figuran en las tablas), el producto se *suma* a la función de dicho ángulo menor si se trata de senos o tangentes y se *resta* de la misma si se trata de cosenos o cotangentes.

El exceso del ángulo dado sobre el menor de los dos que lo comprende, ha de referirse a minutos para aplicarle la regla anterior. Si tuviera segundos se pueden reducir a fracción de minutos y operar con el número fraccionario resultante, o bien reducir el exceso a segundos, multiplicarlos por la diferencia tabu-

tricas naturales

° ′	sen	tan	cot	cos	′ °
32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0 58
10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50
20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40
30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30
40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20
50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10
33 0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0 57
10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50
20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40
30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30
40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20
50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10
34 0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0 56
10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50
20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40
30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30
40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20
50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10
35 0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0 55
10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50
20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40
30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30
40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20
50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10
36 0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0 54
10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50
20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40
30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30
40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20
50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10
37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53
10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50
20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40
30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30
40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20
50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10
38 0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0 52
10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50
20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40
30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30
40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20
50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10
39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0 51
	cos	cot	tan	sen	′ °

° ′	sen	tan	cot	cos	′ °
39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0 51
10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50
20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40
30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30
40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20
50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10
40 0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0 50
10	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50
20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40
30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30
40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20
50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10
41 0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0 49
10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50
20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40
30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30
40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20
50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10
42 0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0 48
10	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50
20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40
30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30
40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20
50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10
43 0	0,6820	0.9325	1.0724	0.7314	0 47
10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50
20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40
30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30
40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20
50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10
44 0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0 46
10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50
20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40
30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30
40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20
50	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10
45 0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0 45
	cos	cot	tan	sen	′ °

lar y dividir el producto por 600 que son los segundos en que se diferencian dos ángulos consecutivos de las tablas:

Ejemplos:

Hallar sen 12° 16'.
Seno 12° 10' = 0'2108
Producto 2'8 × 6 = 17
Seno 12° 16' = 0'2125
Diferencia tabular / 10 =
= 2'8 diezmilésimas
Exceso del ángulo dado = 6'

Hallar cos 28° 37' 12'';
cos 28° 30' = 0,8788
Producto 1'4×7'20= 9
Coseno 28°37'12'' = 0'8779
Diferencia tabular / 10 =
= 1'4 diezmilésimas
Exceso del áng. dado = 7'20

Hallar cotg 57° 23' 17'';
cotg 57° 20' = 0'6412
Produc. 197 × 0'07= 14
Cotg 57° 23' 17'' = 0'6398
Diferencia tabular / 600 = 0'07
Exceso del ángulo = 197''

Para hallar el ángulo correspondiente a una razón dada no contenida en las tablas se interpola entre las dos que la comprenden, dividiendo el exceso sobre la función menor que figura en las tablas por la décima parte de la diferencia tabular; el cociente es el número de minutos que hay que *sumarle* al ángulo correspondiente a dicha función menor, si se trata de senos o tangentes o *restarle* al mismo ángulo si se trata de cosenos o cotangentes. Si el cociente no fuera exacto se reduciría la fracción decimal resultante a segundos.

6.—Funciones hiperbólicas

Tienen análoga significación que las circulares, pero referidas a la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = 1$$

Sus valores son:

$$\operatorname{sen} h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tg} h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cotg} h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sec h\, x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cosec} h\, x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

El seno hiperbólico puede variar desde $-\infty$ a $+\infty$.
El coseno hiperbólico varía desde 1 a $+\infty$.
La tangente hiperbólica varía desde -1 a $+1$.
La cantidad x se llama *argumento* de las funciones hiperbólicas.
Entre las funciones hiperbólicas de un mismo argumento se verifica:

$$\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{sen} h\, x}{\cos h\, x}$$

$$\operatorname{cotg} h x = \frac{1}{\operatorname{tg} h\, x} \qquad \sec h\, x = \frac{1}{\cos h x}$$

$$\operatorname{cosec} h\, x = \frac{1}{\operatorname{sen} h\, x}$$

Las funciones hiperbólicas de la suma y diferencia de argumentos son:

$$\operatorname{sen} h\,(x \pm y) = \operatorname{sen} h\, x \cos h\, y \pm \operatorname{sen} h\, y \cos h\, x$$

$$\cos h\,(x \pm y) = \cos h\, x \cos h\, y \pm \operatorname{sen} h x \ \operatorname{sen} h\, y$$

$$\operatorname{tg} h\,(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} h\, x \pm \operatorname{tg} h\, y}{1 \pm \operatorname{tg} h\, x \operatorname{tg} h\, y}$$

Relaciones entre las funciones circulares y las hiperbólicas: Fórmulas de Euler.

$$\operatorname{sen} x = -j \operatorname{sen} h\, j\, x$$

$$\cos x = \cos h\, j\, x \qquad \operatorname{tg} x = -j \operatorname{tg} h\, j\, x$$

$$\operatorname{sen} j\, x = j \operatorname{sen} h\, x \qquad \cos j\, x = \cos h\, x \qquad \operatorname{tg} j\, x = j \operatorname{tg} h\, x$$